

Breve Glossario su spazio di Hilbert e MPEG-7

a cura di Marzio **Barbero**

Per facilitare la lettura dell'articolo che segue, poiché affronta temi inusuali per questa rivista, si propone una breve descrizione, in parte tratta da Wikipedia, di alcuni dei termini in esso utilizzati.

Meccanica quantistica: si distingue dalla meccanica classica in quanto esprime la probabilità di ottenere un dato risultato a partire da una certa misurazione. Questa condizione di incertezza o indeterminazione non è dovuta a una conoscenza incompleta, da parte dello sperimentatore, dello stato in cui si trova il sistema fisico osservato, ma è da considerarsi una caratteristica intrinseca, quindi ultima e ineliminabile, del sistema e del mondo subatomico in generale. Descrive i sistemi come una sovrapposizione di stati diversi e prevede che il risultato di una misurazione non sia completamente arbitrario, ma sia incluso in un insieme di possibili valori: ciascuno di detti valori è abbinato a uno di tali stati ed è associato a una certa probabilità di presentarsi come risultato della misurazione.

Spazio di Hilbert: è un insieme con una struttura lineare (spazio vettoriale), su cui è definito un prodotto scalare (in particolare, quindi, è possibile parlare di distanze, angoli, ortogonalità), e tale che sia garantita la completezza (ossia, che non vi siano dei comportamenti patologici nel processo di passaggio al limite). In meccanica quantistica uno stato fisico può essere rappresentato da un elemento (vettore o ket) o da una opportuna combinazione lineare di elementi dello spazio di Hilbert. Lo stato fisico contiene informazioni le quali possono essere esplicitate proiettando il ket di stato su un autostato di una osservabile.

Operatore hermitiano: in algebra lineare, è detto anche operatore autoaggiunto o operatore simmetrico nel caso reale; è un operatore lineare su uno spazio di Hilbert H che è uguale al suo aggiunto. L'aggiunto di un operatore generalizza il trasposto

coniugato di una matrice quadrata al caso infinito dimensionale e il concetto di complesso coniugato di un numero complesso.

Autovettore: In algebra lineare, un autovettore di una trasformazione lineare è un vettore non nullo che non cambia direzione nella trasformazione. Il vettore può cambiare quindi solo per moltiplicazione di uno scalare, chiamato autovalore. In meccanica quantistica, gli operatori corrispondono a variabili osservabili, gli autovettori sono chiamati anche autostati e gli autovalori di un operatore rappresentano quei valori della variabile corrispondente che hanno probabilità non nulla di essere misurati. Il termine autovettore è stato tradotto dalla parola tedesca *Eigenvektor*, coniata da Hilbert nel 1904. *Eigen* significa proprio, caratteristico.

MPEG (Moving Picture Experts Group): è un comitato tecnico congiunto delle organizzazioni internazionali ISO e IEC costituito nel gennaio 1988 per definire standard per la rappresentazione in forma digitale di audio, video e altre tipologie di contenuti multimediali in modo da soddisfare un'ampia varietà di applicazioni. **MPEG-1** (1993) sviluppato per la codifica audio video, utilizzando come supporto per la memorizzazione il CD. **MPEG-2** (1995), largamente diffuso, perché adottato per la codifica audio e video per la televisione digitale (es. gli standard DVB) e per il DVD-Video. **MPEG-4** (1998), nato per consentire un'ampia gamma di applicazioni multimediali, include **AVC (Advance Video Coding)**, caratterizzato da una elevata efficienza di codifica del segnale video e adottato per i sistemi di seconda generazione della televisione digitale e di dischi ottici. **MPEG-7** (2002) non è uno

standard per la codifica video e audio; utilizza il linguaggio XLM per memorizzare metadati, descrittori associati con i contenuti che consentono una ricerca veloce ed efficiente dei contenuti di interesse per l'utente. **MPEG-21** (2001) nato per sviluppare una piattaforma comune per le applicazioni multimediali. È basato su due concetti essenziali: la definizione di un *elemento digitale* come unità fondamentale per la distribuzione e le modalità di interazione tra l'utilizzatore e gli elementi digitali.

MPEG-7: è nato per definire l'organizzazione dei dati multimediali. Sono normalizzati un insieme di Schemi di Descrizione (DS) e di Descrittori (D); un linguaggio atto a specificare tali schemi, denominato Linguaggio di Definizione della Descrizione (DDL); uno schema per codificare la descrizione.

MPEG 7 Visual: Definisce i descrittori e contenuti da associare alla parte visuale di un documento multimediale. Vi sono gruppi di descrittori: il gruppo del colore prevede 7 descrittori; quello della tessitura (*texture*) e della forma (*shape*) ne includono 3 ciascuno; 4 per la descrizione del movimento e 2 per la localizzazione.

SIFT (Scale-Invariant Feature Transform): è un algoritmo utilizzato per la visione computerizzata che permette di rilevare e descrivere caratteristiche locali in immagini. Per ogni oggetto in un'immagine di apprendimento, sono estratti punti interessanti per fornire una descrizione delle caratteristiche dell'oggetto. Per un riconoscimento affidabile, è importante che le caratteristiche estratte dall'immagine di apprendimento siano rilevabili anche con cambiamenti di scala, rumore e illuminazione. Il metodo, pubblicato da David Lowe nel 1999, può identificare in modo robusto oggetti anche nella confusione o parzialmente nascosti, perché il descrittore SIFT è invariante per scala, orientazione e distorsione affine e parzialmente invariante a cambi di illuminazione.

Le caratteristiche secondo MPEG-7 nello Spazio di Hilbert

Interrogazioni per individuare immagini simili utilizzando la sovrapposizione lineare*

Elisa Maria **Todarello** e Walter **Allasia**
Eurix, Torino

Mario **Stroppiana**,
Rai - Centro Ricerche e Innovazione Tecnologica

1. INTRODUZIONE

E' descritta una tecnica per la rappresentazione di immagini digitali, raggruppamenti (*cluster*) e interrogazioni (*query*) come vettori di uno spazio degli stati di Hilbert seguendo le regole della meccanica quantistica (QM). Si parte dalla considerazione che esistono analogie tra il processo atto ad individuare informazioni all'interno di un archivio, utilizzando criteri di somiglianza, ed il processo di misurare una grandezza fisica. Nell'approccio formale qui seguito, i raggruppamenti sono rappresentati come sovrapposizioni lineari dei vettori che rappresentano i singoli membri del raggruppamento. E' stato realizzato un prototipo software che applica l'idea a gruppi di immagini digitali utilizzando i Descrittori Visuali previsti nello standard MPEG-7. Per valutare le prestazioni del software sviluppato è stato effettuato

* Questo articolo è basato sul contributo "MPEG-7 Features in Hilbert Spaces: Querying Similar Images with Linear Superpositions", presentato al 5° International Quantum Interaction Symposium tenuto ad Aberdeen, UK dal 26 al 29 giugno 2011.

Sommario

Ci sono alcune analogie tra Information Retrieval (recupero delle informazioni) e il processo di misurazione di una quantità osservabile nel campo della meccanica quantistica (QM). Questo lavoro, a partire da tali analogie, propone un metodo per la rappresentazione digitale delle immagini attraverso l'uso dei descrittori visuali previsti da MPEG-7. Clusters sono descritti come sovrapposizioni di vettori, tenendo conto della distribuzione dei valori delle caratteristiche visive di tutti i loro membri. Sono calcolati dei punteggi che indicano la somiglianza fra immagini, facendo uso della struttura geometrica degli spazi di Hilbert e delle regole della meccanica quantistica, e tali punteggi sono utilizzati per l'assegnazione delle immagini ai diversi raggruppamenti. E' stato sviluppato un prototipo software per valutare i vantaggi offerti da tale metodo per il recupero delle informazioni basato sul loro contenuto (CBIR).

un test preliminare per determinare le assegnazioni ai raggruppamenti di immagini appartenenti ad un insieme campione.

La sezione 2 riporta una rapida panoramica delle opere e teorie analizzate per lo sviluppo di questo lavoro. Il metodo proposto è descritto nella sezione 3. La realizzazione del software e del test sono descritte nella sezione 4. Conclusioni e suggerimenti il lavoro futuro sono indicati nella sezione 5.

2. LAVORI CORRELATI

L'idea di una analogia concettuale tra gli elementi di QM e IR è stata formulata per la prima volta in [1]: la rilevanza di un documento nei confronti di una interrogazione è associata ad un operatore hermitiano \mathbf{R} su uno spazio di Hilbert in cui gli oggetti sono rappresentati come vettori normalizzati. Per mezzo del teorema di Gleason, una misura di probabilità è definita in ogni sottospazio. In [1] non si fa riferimento ad un tipo specifico di documento (testo, immagine o altro).

Attualmente vi sono diversi gruppi di ricerca che lavorano in questo campo. Una panoramica dello stato dell'arte è disponibile in [2]. In particolare, due opere orientate al recupero di documenti di testo sono [3], incentrata sulla descrizione del contesto in una attività di recupero di informazioni (*IR task*), e [4], dedicato alla modellazione dell'interazione con l'utente. In [5] è proposta una tecnica per unificare il recupero di immagini digitali in base alle annotazioni e quello in base ai contenuti, incentrato sulle caratteristiche HSV.

Proponiamo una tecnica per il recupero in base al contenuto (CBIR) di immagini digitali, utilizzando i Descrittori Visuali di MPEG-7 [6].

Si riassume brevemente il formalismo matematico adottato in QM, descritto più accuratamente in [7].

Lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un vettore di stato normalizzato, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, dove \mathcal{H} è lo spazio degli stati di Hilbert. Una grandezza osservabile, \mathcal{X} , è rappresentata in \mathcal{H} da un operatore hermitiano, \mathbf{X} . Gli autovalori di \mathbf{X} sono i possibili

Acronimi e sigle

CBIR	Content-Based Information Retrieval
CVDS	Compact Descriptors for Visual Search
HSV	Hue, Saturation, Value
IR	Information Retrieval
MPEG	Moving Picture Experts Group (ISO/IEC JTC 1/SC 29/WG 11)
QM	Quantum Mechanics
SIFT	Scale-Invariant Feature Transform

risultati di una misura di \mathcal{X} . Ogni autovalore è associato ad un sottospazio di \mathcal{H} mediante l'equazione agli autovalori. Gli autovettori (normalizzati) di \mathbf{X} costituiscono una base ortonormale per \mathcal{H} . Questo dimostra che \mathcal{H} ha una dimensione per ogni possibile valore di \mathcal{X} .

La probabilità $\mathcal{P}_\psi(x_i)$ di ottenere l'autovalore x_i come risultato di una misura di \mathbf{X} in un sistema nello stato $|\psi\rangle$ è dato dalla proiezione ortogonale di $|\psi\rangle$ sul corrispondente sottospazio degli autovalori:

$$\mathcal{P}_\psi(x=i) = |\omega_i|^2 = \langle \psi | \mathbf{P}_i | \psi \rangle \quad (1)$$

dove \mathbf{P}_i è il proiettore sul sottospazio associato all'autovalore x_i e ω_i è l'ampiezza probabilità di ottenere x_i quando viene effettuata una misura di \mathbf{X} .

3. RAPPRESENTAZIONE DI IMMAGINI E CALCOLO DELLA RILEVANZA

Illustriamo un metodo per la rappresentazione di documenti, raggruppamenti e interrogazioni in un unico spazio. Il metodo permette il calcolo di un punteggio (*score*) associato alla somiglianza tra i documenti. Questo punteggio è utilizzato per l'assegnazione al raggruppamento. La motivazione alla base del metodo presentato è esplorare l'analogia concettuale e formale tra IR e QM, allo scopo di determinare le potenzialità ed i limiti di questa applicazione alle immagini digitali. Questo approccio teorico è particolarmente adatto per la rappresentazione dei raggruppamenti come sovrapposizioni lineari di vettori, così come spiegato nel seguito. Utilizzando

la rappresentazione proposta, l'assegnazione di un'immagine a un raggruppamento è associata in modo naturale al processo di misura di una quantità osservabile in meccanica quantistica. Illustriamo la mappatura degli elementi QM ai concetti IR attraverso un semplice esempio. Il metodo può essere applicato a qualsiasi caratteristica. Si consideri un'immagine descritta da una caratteristica visuale, \mathcal{X} , che può assumere i valori quantizzati 0,1,2.

1. \mathcal{X} viene rappresentato come operatore hermitiano, X sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} .
2. Gli autovalori di X coincidono con l'insieme dei valori che la quantità caratteristica può assumere, cioè $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. In questo esempio, assumiamo che gli autovalori non siano degeneri.
3. Lo spazio degli stati \mathcal{H} è l'insieme delle combinazioni lineari (*span*) degli autovettori di X . Indicando l'autovettore associato ad x_i come $|x_i\rangle$, una base ortonormale per \mathcal{H} è $\{|x_0\rangle, |x_1\rangle, |x_2\rangle\}$.
4. Un documento d è associato ad un vettore $|d\rangle \in \mathcal{H}$, quindi può essere espresso come una combinazione lineare dei vettori che costituiscono la base. Nell'esempio, $|d\rangle = \sum_{i=0}^2 \omega_i |x_i\rangle$ dove gli ω_i sono pesi denominati *ampiezze di probabilità*.

Si noti che si assume che tutti i vettori considerati siano normalizzati a 1. Si può verificare che \mathcal{H} ha una dimensione per ogni possibile valore di X . Ad esempio un documento che ha valore 0 per X sarà rappresentato come $|d\rangle = |0\rangle$. Questa rappresentazione è banale per singoli documenti: il vettore documento sempre coincide con uno degli autovettori di X , vale a dire che ha un valore ben definito per la caratteristica \mathcal{X} . L'introduzione di raggruppamenti di documenti dà un significato al principio di sovrapposizione della QM nell'analogia con l'IR: qualsiasi combinazione lineare di vettore-documenti rappresenta a sua volta un vettore-documento. Un raggruppamento di documenti è rappresentato come una sovrapposizione lineare dei vettori associati ai documenti appartenenti al rag-

gruppamento. Le ampiezze di probabilità ω_i sono definite come la radice quadrata della frequenza di occorrenza di ciascun vettore del raggruppamento. Un raggruppamento C che comprende gli elementi $C = \{|d_i\rangle\} \quad i = 1 \dots N$ è quindi descritto come:

$$|C\rangle = \sum_{i=1}^N \omega_i |d_i\rangle \quad (2)$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\text{numero di occorrenze di } d_i}{\text{numero totale di vettori } C}} \quad (3)$$

$$\text{dove } |\omega_i|^2 = 1$$

Nel nostro esempio, se $C = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$, allora $|C\rangle = \sqrt{2/5} |0\rangle + \sqrt{2/5} |1\rangle + \sqrt{1/5} |2\rangle$

I documenti ed i raggruppamenti sono rappresentati in modo uniforme: sono tutti vettori nello stesso spazio \mathcal{H} . Questa rappresentazione ha più informazioni rispetto alla identificazione di un raggruppamento con il suo baricentro (o centroide), dal momento che il raggruppamento è ora associato per una distribuzione di probabilità. Nell'approccio usuale basato sullo "spazio metrico", un vettore relativo ad una interrogazione è associato al raggruppamento il cui centroide ha distanza minima dal vettore, rispetto ai centroidi degli altri raggruppamenti. Nel caso di una distribuzione fortemente sparsa dei vettori appartenenti al raggruppamento, è possibile che si producano errori di associazione.

5. L'interrogazione q è un documento che deve essere assegnato a un raggruppamento ed è associata al concetto di stato di un sistema quantistico, perché induce misura di probabilità sui sottospazi dello spazio degli stati, come indicato dal teorema di Gleason, cioè assegna una probabilità di rilevanza di ogni corrispondenza documento/raggruppamento. È rappresentato in \mathcal{H} da $|q\rangle$.
6. La probabilità di rilevanza di un documento/raggruppamento C rispetto a q è quindi:

$$\mathcal{P}_q(C) = |\omega_i|^2 = \langle q | P_C | q \rangle \quad (4)$$

dove P_C è l'operatore di proiezione su $|C\rangle$.

L'assegnazione di q a un raggruppamento è ottenuto calcolando la somiglianza tra q e ogni vettore presente nel raggruppamento e scegliendo quello più simile.

4. REALIZZAZIONE E TEST

Abbiamo sviluppato un prototipo software che implementa il metodo proposto di rappresentazione e attribuzione dei punteggi per le immagini digitali, caratterizzato dai seguenti Descrittori Visuali di MPEG-7:

- ✓ **Scalable Color**, con 64 coefficienti di Haar con piani a 8 bit;
- ✓ **Color Layout**, con 6 coefficienti per la luminanza e 3 coefficienti per ogni crominanza;
- ✓ **Edge Histogram**, con 5 tipi di bordi con suddivisione in 16 blocchi dell'immagine, dando origine ad 80 coefficienti.

Nella prima fase, le immagini sono state rappresentate in uno "spazio metrico" come normalmente avviene in CBIR: ogni dimensione corrisponde ad un coefficiente/caratteristica e la somiglianza tra due documenti è inversamente proporzionale alla distanza tra i vettori. I vettori nella "spazio metrico" sono raggruppati utilizzando lo strumento *Kmlocal* [8], adottando l'algoritmo *K-means* nell'implementazione *Hybrid*. Questo strumento fornisce come risultato le coordinate del baricentro dei raggruppamenti e l'assegnazione ai diversi raggruppamenti di ciascun documento che fa parte dell'insieme di dati.

Nella seconda fase, è stato creato lo "spazio di Hilbert" in base al modello descritto nella Sezione 3.

Per testare l'applicazione, è stato utilizzato un insieme di dati costituito da 18.461 immagini selezionate in modo casuale a partire dalla collezione CoPhIR [9], dove le immagini sono caratterizzate mediante i Descrittori Visuali MPEG-7. Le immagini sono state organizzate in 1846 raggruppamenti: tale numero è stato scelto in base a una regola empirica. Abbiamo scelto 12 immagini fra quelle disponibili nell'insieme per effettuare le interrogazioni e abbiamo ottenuto

l'assegnazione ad uno dei raggruppamenti in base ai due metodi: il "metodo metrico" (assegnazione calcolata al momento della creazione del raggruppamento) ed il "metodo Hilbert", per il quale abbiamo creato la rappresentazione della interrogazione e dei raggruppamenti nello spazio di Hilbert, e successivamente il punteggio per ciascuna interrogazione nei confronti di ciascun raggruppamento utilizzando l'algoritmo rappresentato dall'equazione (4). L'interrogazione viene assegnata al raggruppamento che ottiene il punteggio più alto.

Nel nostro esempio è preso in considerazione un raggruppamento C che comprende 10 membri. Si presume che vi sia un coefficiente, Colore Scalabile 0, che può assumere solo i valori interi da -19 a 20: lo spazio di Hilbert ha 40 dimensioni. L'avere

$$|C\rangle = \sqrt{2/10} |11\rangle + \sqrt{5/10} |12\rangle + \sqrt{3/10} |13\rangle$$

significa che di C fanno parte 2 immagini con Colore Scalabile 0 pari a 11, 5 immagini il cui valore della caratteristica considerata è 12, e 3 immagini in cui vale 13. Gli altri vettori che costituiscono la base hanno un coefficiente nullo e pertanto non compaiono nella sovrapposizione.

A causa del fatto che l'insieme di dati non presenta una evidente struttura organizzata in raggruppamenti, i raggruppamenti creati non sono facilmente identificabili in base ad un contenuto o un soggetto specifico.

Ciò è la causa della presenza di un rumore di fondo nei risultati ottenuti: non è stato possibile valutare alcune delle assegnazioni a causa della scarsa qualità dei raggruppamenti.

Inoltre, poiché i raggruppamenti sono stati creati appositamente per effettuare il test, alle interrogazioni è stata associata una pre-assegnazione. Ciò implica che le assegnazioni devono essere valutate visivamente, con un confronto qualitativo tra i due metodi, ottenuta visualizzando ogni immagine oggetto di interrogazione nel contesto del raggruppamento. I risultati di questa valutazione visiva sono riportati in tabella 1.

5. CONCLUSIONI E LAVORO FUTURO

Questo lavoro fornisce due contributi principali.

Il primo è costituito dalla definizione di un modello per la rappresentazione di documenti per mezzo delle loro caratteristiche, rappresentate in uno spazio di Hilbert, costruito in analogia con lo spazio degli stati della meccanica quantistica (QM). Le caratteristiche sono rappresentate da operatori hermitiani, i cui autovalori sono i possibili valori delle caratteristiche. L'interrogazione è associata al vettore di stato della QM, in quanto essa determina la probabilità che la misura di un'osservabile risulti in un certo autovalore. Questa probabilità è interpretata come somiglianza tra il documento oggetto dell'interrogazione e ognuno dei documenti compreso nell'insieme dei dati. Il ruolo del principio di sovrapposizione nell'applicazione IR è ottenuto con l'introduzione di raggruppamenti di immagini, rappresentati dalle combinazioni lineari dei vettori che costituiscono i raggruppamenti. Le immagini, i raggruppamenti e le interrogazioni sono quindi rappresentati in modo uniforme come vettori dello stesso spazio di Hilbert.

Il secondo contributo è il prototipo di applicazione software, che realizza il metodo proposto per le immagini digitali utilizzando il formato dei Descrittori Visuali MPEG-7 per individuare le caratteristiche visive. Il prototipo software crea lo spazio di Hilbert e calcola l'assegnazione di un documento oggetto di interrogazione ad uno dei raggruppamenti. Il test dell'applicazione fornisce una valutazione qualitativa di tale assegnazione se confrontata con il metodo normalmente adottato, basato sul baricentro.

La sperimentazione del nuovo metodo ha dato buoni risultati per la maggior parte delle interrogazioni, ma sono necessari ancora miglioramenti in molti aspetti. In particolare, è necessario utilizzare un insieme di immagini con una struttura con raggruppamenti meglio definiti, collegata con un insieme di dati altamente affidabili. In questo modo sarebbe possibile una valutazione quantitativa. Le interrogazioni dovrebbero basarsi su immagini non utilizzate nella fase di raggruppamento ed i parametri dell'algoritmo *K-means* dovrebbero subire una messa a punto, in particolare per quanto riguarda il numero di raggruppamenti. Infine, il nuovo metodo dovrebbe essere utilizzato anche per la creazione dei raggruppamenti.

N	identificatore interrogazione (<i>query Id.</i>)	Valutazione visiva
1	9656496	<i>I raggruppamenti sono simili, dal punto di vista visivo</i>
2	35404821	<i>Stesso raggruppamento</i>
3	67528271	<i>L'assegnazione con il metodo dello spazio di Hilbert non è visualmente buono</i>
4	24869474	<i>Stesso raggruppamento</i>
5	67154639	<i>Le due assegnazioni evidenziano elementi differenti delle immagini</i>
6	67867803	<i>Stesso raggruppamento</i>
7	5042589	<i>Stesso raggruppamento</i>
8	5042740	<i>Stesso raggruppamento</i>
9	67479156	<i>L'assegnazione mediante sistema metrico è visualmente migliore</i>
10	24567694	<i>Stesso raggruppamento</i>
11	35685661	<i>Il processo di raggruppamento non è avvenuto correttamente</i>
12	41930413	<i>Il processo di raggruppamento non è avvenuto correttamente</i>

Tab. 1 - Valutazione visiva confrontando le assegnazioni delle interrogazione con i metodi "metrico" e di "Hilbert". I "query Id" sono i nomi che identificano i file nella collezione CoPhIR.

Non tutti i postulati della QM trovano un'applicazione nell'analogia con l'IR, in particolare, al momento non è stato trovato un significato per l'esistenza di operatori non commutanti e per l'introduzione di un'evoluzione hamiltoniana nell'applicazione.

Un eventuale lavoro futuro dovrebbe focalizzarsi sul feedback della pseudo-rilevanza, per seguire in modo automatico le scelte e gli interessi dell'utente. Se un utente effettua una interrogazione a un sistema, i primi k vettori risultanti possono essere rappresentati come un raggruppamento-sovrapposizione l'immagine oggetto dell'interrogazione può essere ruotata in questo sottoinsieme di ordine k , al fine di riapplicare un'ulteriore interrogazione, indirizzata con maggiore precisione a rispondere alle esigenze dell'utente. L'approccio presentato risulta ancor più utile quando tipi differenti di documenti sono presenti nei raggruppamenti, come metadati e video. Caratteristiche locali sono rilevanti, come, ad esempio le SIFT [10]. MPEG sta per analizzare e standardizzare le caratteristiche locali come Descrittori Compatti per la Ricerca Visuale (gruppo CVDS). Questi nuovi descrittori possono trarre beneficio dall'approccio di sovrapposizione per tener conto di tutte le caratteristiche visuali estratte dall'immagine. Un'ulteriore indagine potrebbe valutare possibili applicazioni di IR alle proprietà algebriche di osservabili incompatibili e di una evoluzione hamiltoniana di un sistema.

BIBLIOGRAFIA

1. van Rijsbergen C.J.: "The Geometry of Information Retrieval", Cambridge University Press, Cambridge, UK (2004)
2. Song D., Lalmas M., van Rijsbergen K., Fromholz I., Piwowarski B., Wang J., Zhang P., Zuccon G., Bruza P., Arafat S., Azzopardi L., Buccio E.D., Huertas-Rosero A., Hou, Y., Melucci M., Rueger S.: "How quantum theory is developing the field of information retrieval (2010), <http://www.aaai.org/ocs/index.php/FSS/FSS10/paper/view/2187>
3. Melucci M.: "A basis for information retrieval in context", ACM Transaction on Information Systems 26(3), 41 pages (June 2008), <http://doi.acm.org/10.1145/>
4. Piwowarski B., Lalmas M.: "Structured information retrieval and quantum theory", in: Bruza P., Sofge D., Lawless W., van Rijsbergen C.J., Klusch, M. (eds.) Proceedings of the Third Quantum Interaction Symposium. Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol. 5494. Springer (March 2009).
5. Wang J., Song D., Kaliciak L.: "Tensor product of correlated textual and visual features: A quantum theory inspired image retrieval framework", AAAI Fall Symposium Series (2010), <http://www.aaai.org/ocs/index.php/FSS/FSS10/paper/view/2297>
6. JTC1/SC29/WG11: "I.O.F.S.I.: Information technology - multimedia content description interface part 3: Visual", ISO / IEC 15938-3:2002. (2001)
7. Cohen-Tannoudji C., Dui B.: "Quantum Mechanics". Wiley-Interscience (1991)
8. Kanungo: "An efficient k-means clustering algorithm: Analysis and implementation". IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence 24, 881-892 (2002)
9. Bolettieri P., Esuli A. Falchi F., Lucchese C., Perego R., Piccioli T., RaBitti F.: "CoPhIR: a test collection for content-based image retrieval", CoRRabs/0905.4627v2 (2009), <http://cophir.isti.cnr.it>
10. Lowe, DG: "Distinctive image features from scale-invariant keypoints". Int. J. Comput. Vision 60, 91-110 (novembre 2004)